1.5) Para que S_1 y S_2 generen el mismo espacio vectorial, debo comprobar que los componentes de S_1 se pueden escribir como una CL de S_2 y viceversa (doble inclusión)

~~como $\langle S_1 \rangle$ y $\langle S_2 \rangle$ tienen la misma dimensión, no hace falta probar la viceversa.~~

$$S_1 := \{\underbrace{e^{ax}\cos(bx)}_{\text{I}}, \underbrace{e^{ax}\operatorname{sen}(bx)}_{\text{II}}\} \quad y \quad S_2 := \{e^{(a+ib)x}, e^{(a-ib)x}\}$$

Veo el caso de I

$$e^{ax}\cos(bx) = \alpha_1 \cdot \left(e^{(a+ib)x}\right) + \alpha_2 \cdot \left(e^{(a-ib)x}\right) \quad (*)$$

La fórmula de Euler dice:

$$e^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i\operatorname{sen}(b))$$

$$\to (*) \to e^{ax}\cos(bx) = \alpha_1 \cdot \left(e^{ax}(\cos(bx) + i\operatorname{sen}(bx))\right) + \alpha_2 \cdot \left(e^{ax}(\cos(bx) - i\operatorname{sen}(bx))\right)$$

$$\to e^{ax}\cos(bx) = \alpha_1 e^{ax}\cos(bx) + \alpha_1 e^{ax} i\operatorname{sen}(bx) + \alpha_2 e^{ax}\cos(bx) - \alpha_2 e^{ax} i\operatorname{sen}(bx)$$

$$\to e^{ax}\cos(bx) = e^{ax}\cos(bx) \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + e^{ax} i\operatorname{sen}(bx) \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)$$

→ queremos, para que se cumpla la igualdad, que:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \to 2\alpha_1 = 1 \to \boxed{\alpha_1 = 1/2} \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \to \alpha_1 = \alpha_2 \to \boxed{\alpha_2 = 1/2} \end{cases}$$

Por lo tanto, I $\subseteq S_2$. ✓

Veo el caso de II

$$e^{ax}\operatorname{sen}(bx) = e^{ax}\cos(bx)(\alpha_1+\alpha_2) + e^{ax}i\operatorname{sen}(bx).(\alpha_1-\alpha_2)$$

→ queremos, para que se cumpla, que:

$$\alpha_1+\alpha_2 = 0 \to \alpha_1 = -\alpha_2 \to \boxed{\alpha_1 = \frac{1}{2i}}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{1}{i} \to -2\alpha_2 = \frac{1}{i} \to \boxed{\alpha_2 = -\frac{1}{2i}}$$

Por lo tanto II $\subseteq S_2$ ✓

~~Ahora~~ Demostré la inclusión de S_1 en S_2 ✓

Ahora quiero demostrar que $S_2 \subseteq S_1$

→ $S_1 = \{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\}$, $S_2 = \{\underbrace{e^{(a+ib)x}}_{\mathrm{I}}, \underbrace{e^{(a-ib)x}}_{\mathrm{II}}\}$

Veo el caso I

$$e^{(a+ib)x} = \alpha_1.(e^{ax}\cos(bx)) + \alpha_2.(e^{ax}\operatorname{sen}(bx))$$

Para que se cumpla, $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = i$, I $\subseteq S_1$ ✓

Veo caso II

$$e^{(a-ib)x} = \alpha_1.(e^{ax}\cos(bx)) + \alpha_2.(e^{ax}\operatorname{sen}(bx))$$

Para que se cumpla $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = -i$, II $\subseteq S_1$

Demostré la inclusión de S_2 en S_1.

Entonces, como $S_1 \subseteq S_2$ y $S_2 \subseteq S_1$ generan el mismo $\mathbb{C}$-esp. vectorial.